Преобразование Фурье (Fourier transform)

Разделы: Алгоритмы

Преобразование Фурье — это интегральное преобразование, которое ставит в соответствие функции временной области функцию частотной области. Преобразование Фурье задается формулой:

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-\mathrm{i}zu}\mathrm{d}u\,.$$

Если функция $f(x)$ имеет конечное число скачков, монотонна на конечном числе промежутков и выполняется $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, то для всех x, за исключением конечного числа точек, существует обратное преобразование Фурье для функции $\hat{f}(u)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(z)e^{\mathrm{i}zx}\mathrm{d}z\,.$$

Функция $\hat{f}(u)$ называется образом функции $f(x)$, а $f(x)$ — ее прообразом.

Обратное преобразование Фурье можно представить в виде двойного интеграла, называемого интегралом Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-\mathrm{i}(x-u)z}\mathrm{d}u\,,$$

подынтегральная функция которой есть ни что иное, как преобразование Фурье. В связи с этим, различные авторы дают отличные от данного выше определения преобразования Фурье. Это связано с тем, что интеграл Фурье не меняет значения, если изменить знаки в степени экспоненты в прямом и обратном преобразовании на обратные, а коэффициенты перед преобразованиями задают такими, что их произведение равно коэффициенту перед интегралом Фурье.

Изначально преобразование Фурье было применено для решения задачи теплопроводности, для этого были разработаны методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. Уравнения такого типа широко распространены в природе, что привело к обширному изучению преобразования Фурье, в последующем были найдены множество свойств преобразования. Все это привело к расширению круга, как теоретических, так и практических вопросов, в которых применяется преобразование Фурье, таких как теория чисел, теория вероятности, статистика, физика, квантовая механика, широко применяется в электротехнике и радиотехнике.

В анализе данных преобразование Фурье применяется для сжатия и сглаживания данных. Возможность применения преобразования Фурье для сжатия данных основана на теореме Котельникова: любая функцию с ограниченным сверху спектром $f_{\max}$ может быть восстановлена по отсчетам, следующим друг за другом менее, чем за $\frac{1}{2f_{\max}}$.

В современной теории анализа данных также применяется вейвлет-преобразование, которое обобщает преобразование Фурье. Несмотря на это преобразование Фурье остается простейшим и важнейшим примером интегрального преобразование, на основе которой были разработаны новые и более современные методы.